Réduction des Endomorphismes Normaux

Lemme 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel u-stable, alors $F^\perp$ est u^*-stable. Si u est de plus un endomorphisme normal et E_λ un sous-espace propre de u, alors E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont stables par u et u^*.

Démonstration. Si $x \in F$ et $y \in F^\perp$, alors $\langle x, u^*(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0$. Donc $u^*(y) \in F^\perp$, donc $F^\perp$ est u^*-stable.
D'une part, E_λ est u-stable, donc $E_\lambda^\perp$ est u^*-stable. D'autre part :

$$\forall x \in E_\lambda,\ u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = \lambda u^*(x), \text{ i.e. } u^*(x) \in E_\lambda.$$

Donc E_λ est u^*-stable, et $E_\lambda^\perp$ est $(u^*)^* = u$-stable par le point qui précède. □

Lemme 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal, avec $\dim E = 2$, tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $b \neq 0$.

Démonstration. Notons $M = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Notons que $b \neq 0$ puisque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$. La relation $MM^* = M^*M$ donne $b = \pm c$. Or, si $b = c$, la matrice M est symétrique (donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$), ce qui est absurde. Donc $b = -c$ et $a = d$ (en développant la relation matricielle précédente). □

Théorème 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & R_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{pmatrix}$$

où les (λ_i) sont des réels et chaque bloc $R_i \in A_2(\mathbb{R})$ est de la forme $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence forte sur la dimension de E.
Le résultat est clair si $\dim E = 0$ ou $\dim E = 1$. Soit $n = \dim E \geq 2$.
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$, alors pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)$, $E_\lambda^\perp$ est stable par u et u^*, donc $u_{E_\lambda^\perp}$ est normal. Par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{B}_2$ base orthonormale de $E_\lambda^\perp$ telle que $Mat_{\mathcal{B}_2}(u_{E_\lambda^\perp})$ soit de la forme voulue. Pour $\mathcal{B}_1$ base orthonormale de E_λ, la concaténation $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ convient.
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$, alors notons $Q = X^2 + \alpha X + \beta = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$, facteur irréductible de χ_u dans $\mathbb{R}[X]$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. De là, $\det Q(u) = \det(u - \lambda id)\det(u - \overline{\lambda} id) = 0$. Ainsi, $N = \ker Q(u) \neq \{0\}$.
Puisque u est normal, $Q(u)$ commute à u et u^*, donc $v = u_N$ est bien défini. De plus, v^*v est autoadjoint, donc il existe μ réel et $x \in N$ non nul, tels que $v^*v(x) = \mu x$.
Posons $F = \mathrm{Vect}\{x, u(x)\}$, de dimension 2 car $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$. Observons que F est u-stable, car

$$u^2(x) = -\alpha u(x) - \beta x.$$

Cela donne en particulier $F = \mathrm{Vect}\{u(x), u^2(x)\}$. Montrons que F est u^*-stable.

$$u^*(u(x)) = \mu x \in F \text{ et } u^*(u^2(x)) = \mu u(x) \in F.$$

Ainsi, u_F est normal et le lemme précédent s'applique, ce qui donne une première base $\mathcal{B}_1$.
Le premier lemme assure que $u_{F^\perp}$ est bien défini et normal. Puisque $\dim F^\perp = n - 2$, l'hypothèse de récurrence s'applique, ce qui donne une seconde base $\mathcal{B}_2$. La concaténation $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ des deux bases obtenues ci-dessus convient. □